Die Gompertz-Funktion und die Entwicklung von „Corona“

Dietrich Dörner / 14.2.2021

Lehrstuhl für Allgemeine Psychologie und Methodenlehre, Universität Bamberg

Trimberg-Research Academy, Universität Bamberg

Seit Galileo Galilei oder generell seit der Renaissance teilt man in der Wissenschaft die Grundüberzeugung, dass das Geschehen in dieser Welt erklärbar ist, erklärbar durch mehr oder minder komplizierte Kausalzusammenhänge. Diese Überzeugung hat zum Aufstieg der Naturwissenschaften in und nach der Renaissance geführt, der noch einmal dadurch beschleunigt wurde, dass die „Aufklärung“ forderte, dass nichts aber auch gar nichts *nicht* gesagt werden dürfe!

Nun ist die Corona Pandemie zweifellos ein Naturereignis. Die Infektionswellen, die über die Welt gehen, sind (biologische) Wachstumsprozesse. Viele Wachstumsprozesse haben gemeinsame Eigenschaften, auf die wir jetzt eingehen wollen.

Ein (physikalisches) Wachstum ist z.B. ein bestimmter Typ eines Verbrennungsprozesses; zum Beispiel ein Kaminfeuer. Das brennt zunächst einmal langsam an (geringes Wachstum) dann aber wird das Wachstum immer größer, das Feuer flammt auf; von einem bestimmten Zeitpunkt (dem „Wendepunkt“) an wird das Wachstum wieder kleiner, um dann asymptotisch gegen Null zu gehen. – Das Ganze ist also ein asymmetrischer Prozess, der, wenn man ihn in einem Zeitdiagramm aufträgt, wie ein etwas nach rechts gezogenes, asymmetrisches S aussieht. Ein solcher Prozess wird auch Sigmoid genannt, nach dem griechischen Buchstaben „Sigma“. – Abbildung 1 zeigt einen solchen Prozess, und zwar einen aktuellen; das Wachstum der Corona-Virusvariante B.1.1.7 in England vom September 2020 bis zum Januar 2021. – Man sieht an diesem Beispiel ein weiteres Merkmal solcher sigmoidaler Wachstumsprozesse. Sie sind, wie schon gesagt, asymmetrisch; das liegt daran, dass der Wendepunkt solcher Prozesse bei 1/e (e ist die Eulersche Zahl 2.718281 …) liegt, also bei 0.3678... oder bei 36.78%.

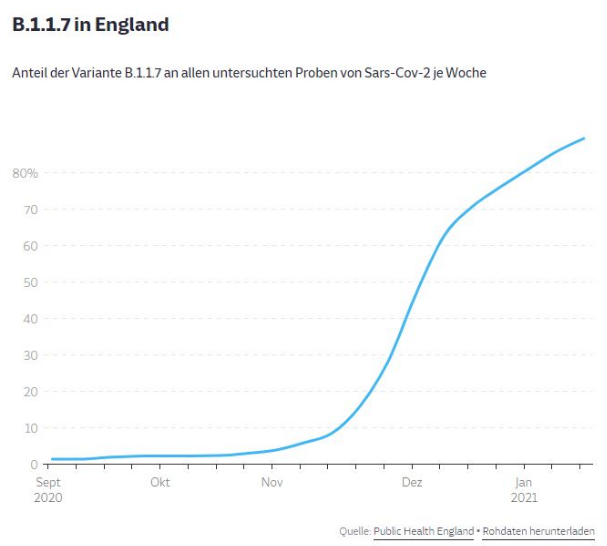

Abbildung 1: *Die Zunahme der relativen Häufigkeit der Corona - Mutante B.1.1.7 in England vom September 2020 bis zum Januar 2021.*

Wenn 36.78 % des Holzes im Kaminfeuer verbrannt sind, nimmt das Wachstum nicht mehr zu, sondern ab, um dann asymptotisch gegen Null zu gehen. – So laufen viele Wachstumsprozesse ab. – Natürlich ändert sich die Sache, wenn man Holz nachschüttet. Dann gibt es ein weiteres Wachstum, das sich auf das schon auslaufende Wachstum des ursprünglichen Feuers aufsetzt. Das nachgeschüttete Holz beginnt erst langsam zu brennen, dann wieder schneller, um sich dann wieder zu verlangsamen, genau wie das erste Feuer.

Für das, was ich hier „Wachstumsprozess“ nenne, gibt es eine allgemeine Formel, nämlich die sogenannte Gompertz-Funktion. Diese wurde im Jahre 1825 entwickelt (oder – als ein Naturgesetz (?) – „gefunden“) durch den britisch-jüdischen Mathematiker Benjamin Gompertz. Er benutzte die Formel um Sterberaten für eine Lebensversicherungsgesellschaft abzuschätzen.

Die Formel für die Gompertz-Funktion lautet:

$$y = A \times e^{(-e^{(B-C \times t)})}$$

Die Formel hat also drei Konstanten, A, B und C. A ist der Endzustand, dem das Wachstum zustrebt, also zum Beispiel 100 % oder 1,152,526 oder 10, oder was immer. B ist die Lage auf der x-Achse. Eine Vergrößerung von B verschiebt die Lage der Kurve nach „rechts“. C ist die Wachstumsgeschwindigkeit. Man könnte auch sagen es ist die (relative) Steilheit des Wachstums (. Je größer C, desto steiler das Wachstum). t ist die einzige Variable, und das ist die *Zeit*.

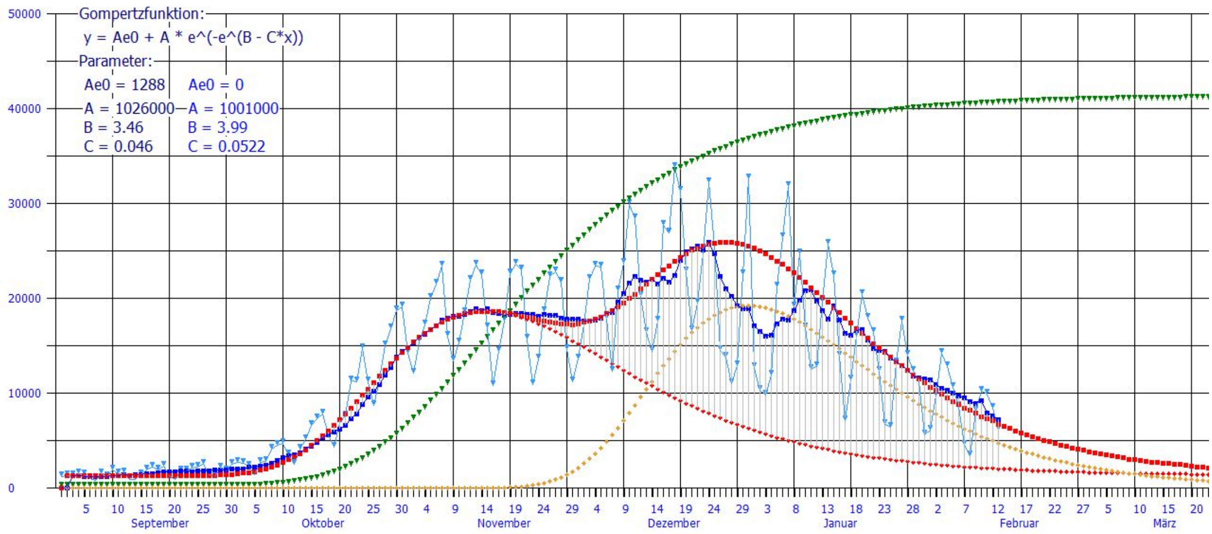

Abbildung 2: *Hellblaue Dreiecke: Anzahl der Neuinfizierten pro Tag nach dem RKI. Blaue Quadrate: sieben Tage Mittel dieser Zahlen. Rote Quadrate: Prognosen von Benjamin Gompertz; zunächst nur für die sogenannte „zweite Welle“, ab dem 19. November als Summe zweier Gompertz-Funktionen mit verschiedenen Parametern. Die Parameter findet man oben links in der Abbildung. – Die grünen Dreiecke stellen die eigentliche Gompertz-Kurve der „zweiten Welle“ dar, die Summe der Neuinfizierten in der Zeit. (Achtung: anderer Maßstab: 1/2500; Maßstab sonst: 1/100.) Die roten Rauten sind die Fortsetzung der 2. Welle. Die gelbe Kurve ist die „herauspräparierte“ dritte Welle.*

Auf Abbildung 2 sieht man den heutigen (13.2.2021) Stand der Entwicklung der Anzahl der Neuinfizierten vom 1. September 2020 (t = 1) an. Die roten Quadrate zeigen die Gompertz-Werte, also die erwartete Anzahl von Neuinfizierten pro Tag. Die blauen Quadrate sind die durch das RKI jeweils angegebenen Zahlen als 7-Tage-Mittel. Die Gompertz-Kurve ergibt sich aus folgender Formel:

$$y = 1026000 \times e^{(-e^{(3.46-0.046 \times t)})},$$

wobei der Prozess auf einem „Grundrauschen“ von 1288 aufsitzt. (Dieses „Grundrauschen“ ist die Anzahl von Neuinfizierten, die man *außerhalb* der „Wellen“ sowieso hat. – Man muss sich das Ganze wohl sowieso so vorstellen, wie einen brodelnden Suppentopf aus dem aber ab und zu dann größere Blasen aufsteigen und platzen.) – Man sieht, dass bis zum 19. November die roten und die blauen Quadrate gut übereinstimmen; die Theorie entspricht der Empirie. Das war die „zweite Welle“. Die roten Quadrate vom 19. November an zeigen die *Summe* von zwei Gompertz-Prozessen. Der zweite hat andere Konstanten. Die konkrete Formel für den zweiten Prozess (also die manchmal sogenannte „dritte Welle“) lautet:

$$y = 1001000 \times e^{\wedge}(-e^{\wedge}(3.99-0.0522 \times t)),$$

wobei dieser zweite Prozess auf dem ersten „aufsitzt“. (Dieser Prozess startet später als die „zweite Welle“. Wenn man nachrechnen will, so muss man den Wert für t_2 für die zweite Welle auf t_1 -45 (15. Oktober) setzen.)

Man sieht, dass die theoretischen Werte sehr gut mit den empirischen Werten übereinstimmen. (Ausnahme: das „Weihnachtsloch“ vom 24 Dezember bis zum 9. Januar. Hier sind die RKI-Werte aufgrund der Unregelmäßigkeiten bei der Berichterstattung der Testzentren und Gesundheitsämter in der Weihnachts- und Neujahrszeit nicht „belastbar“.)

(Achtung: die roten Quadrate sind nicht die „eigentlichen“ Werte der Gompertz-Funktion, sondern das *Wachstum* am Tage i, welches man erhält, indem man den Gompertz-Wert für den Tag i-1 vom Wert für den Tag i abzieht!)

Man kann also die Entwicklung seit dem 1. September mit hoher Genauigkeit bis zum heutigen Tage abschätzen. Die Genauigkeit ist so groß, dass die meisten Personen, denen man die Abbildung 2 zeigt und erklärt, der Meinung sind: „Das geht nicht! Das ist doch unmöglich!“ Oder: „Das habt ihr hinterher so hingedreht, ihr habt so lange an den Parametern gefummelt, bis es eben passte!“

Ganz davon abgesehen, dass man mit dem informellen „Hinfummeln“ so seine Schwierigkeiten hat bei der Gompertz-Funktion: wir haben die Parameter für die „zweite Welle“ am 10. Oktober geschätzt, aufgrund der Werte etwa vom 25. September bis zum 10. Oktober. Wir haben die Werte für die „dritte Welle“ am 10. Dezember geschätzt. Seit dieser Zeit sind die Parametersätze konstant, bis auf die Parametersätze für die „dritte Welle“, die wir leicht adjustiert haben.

„Die Bäume wachsen nicht in den Himmel! Nie!“ Man kann der Abbildung 2 ohne weiteres entnehmen, dass die Gompertz-Funktion wohl ein sehr brauchbares Modell für das Wachstum der Anzahl der Neuinfizierten ist. Die Gompertz-Funktion sagt voraus, bis wann und in welchem Maße die Anzahl der Neuinfizierten wächst (bis zum 24. Dezember!) und wann und in welchem Maße das Wachstum abnimmt. Mit anderen Worten: ein Schwund des Wachstums bedeutet keineswegs, dass irgendwelche Maßnahmen zur Bekämpfung der Infektion erfolgreich waren. Um einen Erfolg der Maßnahmen (lockdown, Schließung von Schulen und Kindertagesstätten, Stilllegung ganz wirtschaftlicher Bereiche) zu demonstrieren, wäre es notwendig zu zeigen, dass die Abnahme des Wachstums größer ist, als „natürlicherweise" (also nach Gompertz) zu erwarten. – (Man kann übrigens auch die Anzahl der Todesfälle und ihre Zu- und Abnahme und die Zu- und Abnahme der Intensivbetten-Belegung durch ganz ähnliche Gompertz-Kurven Summen darstellen, natürlich etwas zeitlich nach hinten versetzt. Aber das habe ich bislang nur sehr grob gemacht und noch nicht im Detail ausgearbeitet.)

Für viele Verfechter der offiziellen Coronapolitik ist das alles eine harte Wahrheit. Und die erste Tendenz ist fast immer: „Das glaube ich nicht!" Vielleicht wäre es aber doch vernünftig, dass man einmal überprüft, ob die Auffassungen, die man sich bislang über den Gang der Infektion machte, nicht falsch sind. Denn – und das sollte man keineswegs vergessen – Maßnahmen wie das Schließen ganzer Wirtschaftszweige, die Schließung von Schulen und Kindertagesstätten, sind für sich gesehen schon teuer und haben außerdem noch viel teurere Neben- und Fernwirkungen! Was aber, wenn diese Aufwendungen umsonst erbracht worden wären? Es hat den Anschein, dass man sich diese Fragen nicht stellt, weil man sie nicht stellen will. Das ist der Sunk-Costs-Effect! Lieber die gleiche Sache immer wieder und immer noch stärker machen, den schon verschwendeten Euros noch mehr hinterherwerfen, um sich nicht klarmachen zu müssen, dass man etwas falsch gemacht hat.

Wir sind keineswegs die einzigen, die versuchen oder versucht haben, die Gompertz-Funktion für die Beschreibung der Entwicklung der Corona-Pandemie zu verwenden. Eine fast „flächendeckende" Verwendung der Gompertz-Funktion findet man bei Everts et al (2020). Es gibt noch viele andere, leider aber nicht in Deutschland! Warum hat man in der Bundesrepublik nicht versucht, die Gompertz-Funktion zu verwenden? Um auf diese Weise ein genaues Bild von der Dynamik der Infektion zu gewinnen. Und um ein besseres Übertragungsmodell zu finden. Denn wenn alle diese „dramatischen" Maßnahmen keine messbaren Effekte haben, dann muss doch etwas falsch sein mit den Vorstellungen, die man sich so über die Übertragungsmechanismen macht!?

Literatur:

Everts, Arnout JW; **Navaratnam**, Devaraj M; **Navaratnam**, Sumitha; **Navaratnam**, Danaraj (2020): Analysing Covid-19 Epidemic Trajectories: Are Countries Flattening the Curve?

Kuala Lumpur, Malaysia, 12:465. doi: 10.35248/0974-8369.20.12.465.: Biol Med (Aligarh).